

Correction de la densité mesurée lors d'une fermentation

C. MEICHEL

Septembre 2007

Abstract

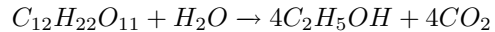
Ce document se propose de mettre en équations l'évolution de la densité d'un liquide sucré pendant le processus de fermentation. Tout au long de l'étude, on ngligera la densité des levures

1 Les variables

Variable	description
ρ_{kiki}	Masse volumique de l'élément <i>kiki</i>
V_{kiki}	Volume de l'élément <i>kiki</i> en cours de fermentation
$V_{kiki-init}$	Volume de l'élément <i>kiki</i> avant fermentation
D_{init}	Densité mesurée avant le début de la fermentation
D	Densité mesurée en cours de fermentation (mesure intermédiaire)
$M_{sucre-init}$	Masse de sucre avant le début de la fermentation
M_{sucre}	Masse de sucre en cours de fermentation lors de la mesure intermédiaire
$M_{sucre-consomme}$	Masse de sucre qui a participés au processus de fermentation
$M_{eau-init}$	Masse d'eau avant le début de la fermentation
M_{eau}	Masse d'eau en cours de fermentation lors de la mesure intermédiaire
$M_{eau-consomme}$	Masse d'eau qui a participés au processus de fermentation
M_{alcool}	Masse d'alcool créé lors du processus de fermentation

2 Un peu de chimie

Dans un premier temps nous allons décrire la réaction chimique de fermentation:



Transposons maintenant la formule en masses molaires:

$$342.3 + 18.02 \rightarrow 4 * 46.07 + 44.01$$

Cette première formule liera la masse de sucre initiale la masse d'alcool créée au cours du processus de fermentation. Une fois l'équilibre molaire traduit en équations, nous avons :

$$\frac{M_{\text{sucre-consomme}}}{342,3} = \frac{M_{\text{eau-consomme}}}{18,02}$$

$$\frac{M_{\text{alcool}}}{46,07} = 4. \frac{M_{\text{sucre-consomme}}}{342,3}$$

Soient, la première et la deuxième équation:

$$342,3.M_{\text{alcool}} - 4 * 46,07.M_{\text{sucre-consomme}} = 0 \quad (1)$$

$$342,3.M_{\text{eau-consomme}} - 18,02.M_{\text{sucre-consomme}} = 0 \quad (2)$$

3 Les densités

3.1 Avant fermentation

Avant fermentation, la densité mesurée correspond à:

$$D_{\text{init}} = \frac{M_{\text{sucre-init}} + M_{\text{eau-init}}}{V_{\text{sucre-init}} + V_{\text{eau-init}}}$$

Or, de manière générale,

$$V = \frac{M}{\rho}$$

Nous avons donc :

$$D_{\text{init}} = \frac{M_{\text{sucre-init}} + M_{\text{eau-init}}}{\frac{M_{\text{sucre-init}}}{\rho_{\text{sucre}}} + \frac{M_{\text{eau-init}}}{\rho_{\text{eau}}}}$$

En simplifiant, nous obtenons la troisième équation:

$$M_{\text{sucre-init}}.(D_{\text{init}}.\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}}) + M_{\text{eau-init}}.(D_{\text{init}}.\rho_{\text{sucre}} - \rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}}) = 0 \quad (3)$$

3.2 Pendant fermentation

Pendant la fermentation, la démarche est similaire, sauf qu'il y a présence d'alcool:

$$D = \frac{M_{\text{sucre}} + M_{\text{eau}} + M_{\text{alcool}}}{V_{\text{sucre}} + V_{\text{eau}} + V_{\text{alcool}}}$$

Une fois simplifié, nous obtenons la quatrième équation:

$$M_{\text{sucre}}.(D.\rho_{\text{eau}}.\rho_{\text{alcool}} - \rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}}.\rho_{\text{alcool}}) + M_{\text{eau}}.(D.\rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{alcool}} - \rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}}.\rho_{\text{alcool}}) + M_{\text{alcool}}.(D.\rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{sucre}}.\rho_{\text{eau}}.\rho_{\text{alcool}}) = 0 \quad (4)$$

4 Finissons avec la physique

Restent quelques équations faciles à comprendre:

$$\begin{aligned}
M_{sucre-init} + M_{eau-init} &= D_{init} \cdot (V_{total-init}) & (5) \\
M_{sucre-init} - M_{sucre-consomme} - M_{sucre} &= 0 & (6) \\
M_{eau-init} - M_{eau-consomme} - M_{eau} &= 0 & (7)
\end{aligned}$$

5 Résolution des équations

Et hop ! on passe ces sept équations à sept inconnues dans Maxima

$M_{sucre-init}, M_{sucre-consomme}, M_{sucre}, M_{eau-init}, M_{eau-consomme}, M_{eau}, M_{alcool}$

Et le résultat obtenu est le suivant (à savoir que $V_{total-init}$ n'est là que pour rendre le système d'équations solvable. Fixez-le à 1l pour vous simplifier la vie) :

$$\begin{aligned}
\frac{M_{sucre-init}}{V_{total-init}} &= \rho_{sucre} \cdot \frac{D_{init} - \rho_{eau}}{\rho_{sucre} - \rho_{eau}} \\
\frac{M_{sucre-consomme}}{V_{total-init}} &= 17115 \cdot \rho_{eau} \cdot \rho_{sucre} \cdot \rho_{alcool} \cdot \frac{D_{init} - D}{\rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) - 17115 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D} \\
\frac{M_{sucre}}{V_{total-init}} &= -\rho_{sucre} \cdot \frac{\rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau} \cdot (D_{init} \cdot (8313 \cdot \rho_{alcool} - 9214 \cdot D) - 18016 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + \rho_{eau}^2 \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) + 901 \cdot D_{init} \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + 17115 \cdot D_{init} \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot (D - \rho_{eau})}{\rho_{sucre}^2 \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + \rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau}^2 \cdot (-9214 \cdot D - 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 16214 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D) + 17115 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau}^2 \cdot D} \\
\frac{M_{eau-init}}{V_{total-init}} &= \rho_{eau} \cdot \frac{\rho_{sucre} - D_{init}}{\rho_{sucre} - \rho_{eau}} \\
\frac{M_{eau-consomme}}{V_{total-init}} &= 901 \cdot \rho_{eau} \cdot \rho_{sucre} \cdot \rho_{alcool} \cdot \frac{(D_{init} - D)}{\rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) - 17115 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D} \\
\frac{M_{eau}}{V_{total-init}} &= \rho_{eau} \cdot \frac{\rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau} \cdot (D_{init} \cdot (-9214 \cdot D - 7901 \cdot \rho_{alcool}) - 18016 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + 901 \cdot D_{init} \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + \rho_{sucre}^2 \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot D_{init} \cdot \rho_{alcool}) + 17115 \cdot D_{init} \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D}{\rho_{sucre}^2 \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) + \rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau}^2 \cdot (-9214 \cdot D - 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 16214 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D) + 17115 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau}^2 \cdot D} \\
\frac{M_{alcool}}{V_{total-init}} &= 9214 \cdot \rho_{eau} \cdot \rho_{sucre} \cdot \rho_{alcool} \cdot \frac{(D_{init} - D)}{\rho_{sucre} \cdot (\rho_{eau} \cdot (9214 \cdot D + 8802 \cdot \rho_{alcool}) - 901 \cdot \rho_{alcool} \cdot D) - 17115 \cdot \rho_{alcool} \cdot \rho_{eau} \cdot D}
\end{aligned}$$

Pour retrouver les volumes respectifs, il suffit de diviser par les masses volumiques des éléments.

Pour information:

$$\rho_{eau} = 1.00$$

$$\rho_{alcool} = 0.79$$

$$\rho_{sucre} \approx 1.68 \text{ (dissout)}$$

Pour retrouver le degré d'alcool, il suffit de calculer:

$$\%alcool = \frac{\frac{M_{alcool}}{\rho_{alcool}}}{\frac{M_{eau}}{\rho_{eau}} + \frac{M_{sucre}}{\rho_{sucre}} + \frac{M_{alcool}}{\rho_{alcool}}}$$

On remarque que $V_{total-init}$ disparaît.